

2. DAĞILIM FONKSİYONU TEKNİĞİ

Sürekli X_1, X_2, \dots, X_n rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ verilmiş olsun. $Y=u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dönüşüm değişkeninin dağılımını bulmak için aşağıdaki adımlar izlenir:

i) $Y = u(X)$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu, dağılım fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(u(X) \leq y) \\ &= P(X \leq u^{-1}(y)) \\ &= F_X(u^{-1}(y)) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

ii) a) Y sürekli bir rastgele değişken ise türev yardımıyla Y 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{dG(y)}{dy} & , G(y)'nin \text{ türevlenebildiği yerlerde} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

b) Y kesikli bir rastgele değişken ise olasılık fonksiyonu $y \in D_y$ için

$$P(Y=y) = G_y(y^+) - G_y(y^-)$$

olacaktır.

Örnek: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olsun. $Y = -\theta \ln X$ rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu Dağılım fonksiyonu tekniğini kullanarak bulunuz?

Çözüm: Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(-\theta \ln X \leq y) \\ &= P(-\ln X \leq \frac{y}{\theta}) \\ &= P(\ln X > -\frac{y}{\theta}) \\ &= P(X > e^{-\frac{y}{\theta}}) \end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki olasılığın hesabı yapıldığında Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$G(y) = \int_{e^{-\frac{y}{\theta}}}^1 f(x) dx = \int_{e^{-\frac{y}{\theta}}}^1 1 dx = x \Big|_{e^{-\frac{y}{\theta}}}^1 = 1 - e^{-\frac{y}{\theta}}$$

şeklinde elde edilir. Buradan Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu dağılım fonksiyonunun türevinin alınmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = - \left(-\frac{1}{\theta} \right) e^{-\frac{y}{\theta}}$$

Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{y}{\theta}} & , \quad 0 < y < \infty \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Sınırların elde edilişi:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq e^{-\frac{y}{\theta}} \leq 1$$

$$0 < e^{-\frac{y}{\theta}} \quad e^{-\frac{y}{\theta}} \leq 1$$

$$\ln 0 < -\frac{y}{\theta} \quad \frac{y}{\theta} \leq 0$$

$$\infty < -\frac{y}{\theta} \quad y \geq 0$$

$$y < \infty$$

Örnek : X rastgele değişkeni [-1,1] aralığı üzerinde Düzgün (Uniform) olarak dağılsın.

a) $Y = |X|$

b) $Y = X^2$

rastgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu Dağılım fonksiyonu tekniği ile bulunuz.

Çözüm: X rastgele değişkeni [-1,1] aralığı üzerinde Düzgün (Uniform) dağılıma sahip ise X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & dd \end{cases}$$

şeklindedir.

- a) Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun tanımından Y' nin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= \int_{-y}^y f(x) dx = \int_{-y}^y \frac{1}{2} dx \\ \frac{1}{2} x \Big|_{-y}^y &= \frac{1}{2} (y+y) = y, \quad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

$$G(y) = y, \quad 0 < y < 1$$

şeklinde bulunur. Dağılım fonksiyonunun türevinin alınmasıyla Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = 1$$

Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{d.d} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Sınırlar

$$Dx = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$$

$$Dy = \{y : y = |x|, -1 \leq x \leq 1\} \quad \text{ise} \quad Dy = \{y : 0 < y < 1\}$$

şekilde bulunur.

- b) Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun tanımından Y' nin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(|X| \leq \sqrt{y}) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{2} - \left(\frac{-\sqrt{y}}{2} \right) = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dağılım fonksiyonunun türevinin alınmasıyla Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. X rastgele değişkeninin tanım kümesi $D_x = \{ x : -1 \leq x \leq 1 \}$ ise Y rastgele değişkeninin tanım kümesi $D_y = \{ y : 0 \leq y \leq 1 \}$ olacaktır.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.